

## Паспорт контрольной работы

по дисциплине «Теория случайных процессов», 7 семестр

### 1. Методика оценки

Контрольная работа проводится по теме «Анализ и моделирование случайных процессов и цепей Маркова», включает 3 задания. Выполняется письменно

#### Критерии оценки

Каждое задание контрольной работы оценивается в соответствии с приведенными ниже критериями.

Контрольная работа считается **невыполненной**, если не выполнено ни одного задания. Оценка составляет **до 9** баллов.

Работа выполнена на **пороговом** уровне, если выполнено полностью хотя бы одно задание, остальные частично. Оценка составляет 10 -20 баллов.

Работа выполнена на **базовом** уровне, если выполнено полностью 2 задания и одно частично. Оценка составляет **21 -30** баллов.

Работа считается выполненной **на продвинутом** уровне, если выполнено полностью с четким обоснованием расчетных формул с проверкой достоверности результатов. Оценка составляет **31 -40** баллов.

### 2. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за контрольную работу учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

Максимальное значение текущего рейтинга складывается: лабораторные работы до 40 баллов, КР - до 40 баллов.

Итоговая экзаменационная оценка определяется: менее 50 баллов - неудовлетворительно; 50-72 (удовлетворительно), 73-87 (хорошо), 88-100 (отлично).

### 3. Пример варианта контрольной работы

**Тема. Анализ и моделирование случайных процессов и цепей Маркова**

**Функции со случайными параметрами**

Дано: функция  $X(t) = u_1 f(t) + u_2 g(t) + h(t)$ , где  $u_1$  и  $u_2$  - случайные величины (случайные параметры), распределенные, соответственно, на интервалах  $[a;b]$  и  $[c;d]$ . Данные для вариантов представлены в табл.1, 2, где  $K_{12}$  - корреляционный момент параметров  $u_1$  и  $u_2$ . Функция  $X(t)$  описывает некоторый случайный процесс.

Требуется:

- 1) построить область возможных траекторий случайного процесса;
- 2) вычислить и построить график математического ожидания случайного процесса;
- 3) вычислить дисперсию, среднее квадратическое отклонение,

корреляционную функцию случайного процесса;  
 4) с учетом заданных  $t_1$ ,  $t_2$  и  $X(t_1)$  составить прогноз  $X(t_2)$ .

Таблица 1

| Вар. | [a;b]  | [c;d]  | $M(u_1)$ | $D(u_1)$ | $M(u_2)$ | $D(u_2)$ | $K_{12}$ |
|------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | [-2;1] | [0;1]  | -1       | 1.5      | 0.75     | 0.1      | -0.2     |
| 2    | [-1;1] | [-1;2] | -0.5     | 0.5      | 1        | 1        | -0.5     |
| 3    | [-1;1] | [-1;2] | -0.5     | 0.5      | 1        | 0.75     | -0.4     |
| 4    | [-3;0] | [0;1]  | -1       | 1        | 0.5      | 0.2      | 0.4      |
| 5    | [-1;0] | [-1;1] | -0.5     | 0.1      | 0.5      | 0.75     | -0.2     |
| 6    | [0;5]  | [-2;0] | 2        | 4        | -1       | 1        | -1       |
| 7    | [0;1]  | [-4;0] | 0.5      | 0.2      | -2       | 3        | 0.5      |
| 8    | [-2;3] | [-1;3] | 1        | 4        | 1        | 2        | 1.5      |
| 9    | [-1;3] | [-2;2] | 1        | 3        | 1        | 2        | 1        |
| 10   | [-1;1] | [-3;1] | 0.5      | 0.5      | -1       | 2.5      | -1       |
| 11   | [-2;4] | [-1;1] | 1        | 5        | 0.5      | 0.75     | 1.25     |
| 12   | [-2;0] | [0;2]  | -1       | 1        | 1        | 1        | -0.75    |
| 13   | [0;1]  | [0;2]  | 0.5      | 0.2      | 1        | 1        | -0.2     |
| 14   | [-1;1] | [-2;3] | -0.5     | 0.5      | 1        | 5        | -1       |
| 15   | [-1;1] | [-2;1] | 0.5      | 0.5      | -1       | 1        | -0.5     |
| 16   | [-1;1] | [-1;1] | 0.5      | 0.5      | -0.5     | 0.5      | -0.2     |
| 17   | [-1;0] | [0;1]  | -0.5     | 0.2      | 0.5      | 0.2      | 0.1      |
| 18   | [0;1]  | [0;1]  | 0.5      | 0.2      | 0.5      | 0.2      | 0.15     |

Таблица 2

| Вар. | $f(t)$          | $g(t)$          | $t_1$ | $X(t_1)$ | $t_2$ |
|------|-----------------|-----------------|-------|----------|-------|
| 1    | $t$             | $t^2 - 2$       | 2     | 0        | 3     |
| 2    | $t^2$           | $1 - t$         | 1     | 0        | 3     |
| 3    | $-\sqrt{t+2}$   | 3               | 2     | 3.5      | 7     |
| 4    | 2               | $3 - t^2$       | 2     | -3.5     | 4     |
| 5    | $2^t$           | 4               | 1     | 0.5      | 2     |
| 6    | 1               | $2^{t-1}$       | 1     | 0.5      | 3     |
| 7    | $2^{t-1}$       | 2               | 1     | -3       | 3     |
| 8    | $\frac{6}{t+1}$ | 4               | 2     | 5        | 5     |
| 9    | 1               | $\frac{4}{t+1}$ | 1     | 4        | 3     |
| 10   | $\sqrt{t+1}$    | 2               | 0     | -2       | 3     |
| 11   | 1               | $\sqrt{t+2}$    | 2     | 1.5      | 7     |
| 12   | $2^{-t}$        | 3               | 1     | 2        | 2     |
| 13   | 5               | $2^{1-t}$       | 1     | 4        | 2     |
| 14   | $2^{2-t}$       | 1               | 1     | 1        | 3     |
| 15   | $\sqrt{t}$      | 3               | 1     | -2       | 4     |
| 16   | $t + 1$         | $t^2 - 2$       | 1     | 2        | 2     |
| 17   | $2t$            | $t^2$           | 1     | -1       | 2     |

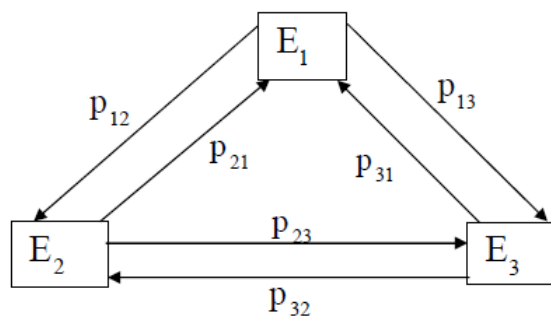


Рис. 1 Цепь Маркова

Дан граф состояний системы (Рис 1). Вероятности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 3.

Требуется:

- 1) составить матрицу переходов;
- 2) вычислить предельные вероятности состояний системы.

Таблица 3

| Вар. | $p_{12}$ | $p_{21}$ | $p_{13}$ | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{23}$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | 0,3      | 0,3      | 0,4      | 0,25     | 0,5      | 0,2      |
| 2    | 0,35     | 0,3      | 0,2      | 0,25     | 0,5      | 0,25     |
| 3    | 0,15     | 0,3      | 0,2      | 0,5      | 0,15     | 0,25     |
| 4    | 0,25     | 0,4      | 0,2      | 0,5      | 0,15     | 0,25     |
| 5    | 0,2      | 0,45     | 0,2      | 0,5      | 0,15     | 0,25     |
| 6    | 0,2      | 0,45     | 0,2      | 0,1      | 0,15     | 0,25     |
| 7    | 0,2      | 0,45     | 0,4      | 0,1      | 0,15     | 0,25     |
| 8    | 0,2      | 0,45     | 0,3      | 0,45     | 0,15     | 0,2      |
| 9    | 0,35     | 0,45     | 0,3      | 0,45     | 0,15     | 0,4      |
| 10   | 0,35     | 0,45     | 0,2      | 0,55     | 0,35     | 0,4      |
| 11   | 0,35     | 0,45     | 0,2      | 0,55     | 0,3      | 0,2      |
| 12   | 0,3      | 0,45     | 0,2      | 0,45     | 0,3      | 0,2      |
| 13   | 0,3      | 0,65     | 0,2      | 0,45     | 0,3      | 0,2      |
| 14   | 0,3      | 0,65     | 0,2      | 0,45     | 0,2      | 0,2      |
| 15   | 0,3      | 0,25     | 0,2      | 0,45     | 0,2      | 0,2      |
| 16   | 0,3      | 0,25     | 0,2      | 0,6      | 0,2      | 0,2      |
| 17   | 0,3      | 0,25     | 0,3      | 0,7      | 0,2      | 0,2      |

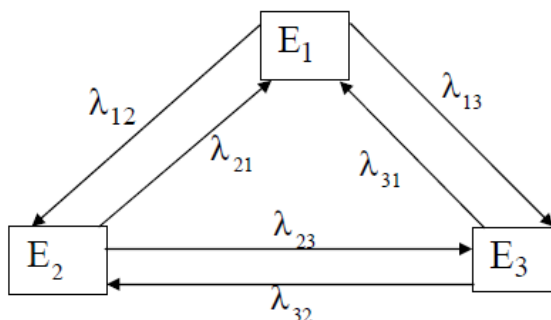


Рис. 2 Цепь Маркова с непрерывным временем

Дан граф состояний системы. Интенсивности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 4.

Требуется:

- 1) составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы;
- 2) вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

Таблица 4

| Вар. | $\lambda_{12}$ | $\lambda_{21}$ | $\lambda_{13}$ | $\lambda_{31}$ | $\lambda_{32}$ | $\lambda_{23}$ |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1    | 2              | 3              | 1              | 3              | 2              | 1              |
| 2    | 5              | 2              | 1              | 4              | 2              | 2              |
| 3    | 3              | 1              | 2              | 2              | 1              | 4              |
| 4    | 2              | 0              | 7              | 3              | 2              | 1              |
| 5    | 3              | 1              | 2              | 2              | 4              | 2              |
| 6    | 2              | 3              | 4              | 2              | 5              | 3              |
| 7    | 1              | 4              | 3              | 3              | 2              | 1              |
| 8    | 2              | 5              | 4              | 1              | 5              | 2              |
| 9    | 4              | 2              | 3              | 2              | 4              | 1              |
| 10   | 2              | 1              | 3              | 4              | 5              | 2              |
| 11   | 1              | 0,5            | 0,5            | 0,25           | 0,75           | 0,25           |
| 12   | 0,25           | 0,75           | 0,25           | 1              | 1              | 0,5            |
| 13   | 0,2            | 0,2            | 0,7            | 0,3            | 0,2            | 0,1            |
| 14   | 0,3            | 0,1            | 0,2            | 0,2            | 0,4            | 0,2            |
| 15   | 0,2            | 0,3            | 0,4            | 0,2            | 0,5            | 0,3            |
| 16   | 0,1            | 0,4            | 0,3            | 0,3            | 0,2            | 0,1            |
| 17   | 3              | 2              | 1              | 2              | 3              | 1              |

### Моделирование цепного процесса

Дан граф состояний системы (рис. 1). Вероятности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 5, указано также и начальное состояние системы.

Таблица 5

| Вар. | $P_{12}$ | $P_{21}$ | $P_{13}$ | $P_{31}$ | $P_{32}$ | $P_{23}$ | Начальное состояние |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------------|
| 1    | 0.3      | 0.5      | 0.2      | 0.4      | 0.3      | 0.3      | $E_1$               |
| 2    | 0.3      | 0.4      | 0.3      | 0.5      | 0.3      | 0.3      | $E_1$               |
| 3    | 0.3      | 0.4      | 0.3      | 0.5      | 0.2      | 0.3      | $E_1$               |
| 4    | 0.1      | 0.25     | 0.5      | 0.2      | 0.2      | 0.5      | $E_1$               |
| 5    | 0.3      | 0.4      | 0.3      | 0.5      | 0.4      | 0.3      | $E_1$               |
| 6    | 0.5      | 0.2      | 0.3      | 0.5      | 0.4      | 0.3      | $E_1$               |
| 7    | 0.5      | 0.2      | 0.3      | 0.2      | 0.6      | 0.3      | $E_1$               |
| 8    | 0.5      | 0.3      | 0.3      | 0.2      | 0.6      | 0.3      | $E_1$               |
| 9    | 0.2      | 0.3      | 0.6      | 0.2      | 0.6      | 0.3      | $E_1$               |
| 10   | 0.6      | 0.3      | 0.2      | 0.2      | 0.5      | 0.3      | $E_2$               |
| 11   | 0.4      | 0.3      | 0.2      | 0.3      | 0.5      | 0.3      | $E_2$               |
| 12   | 0.3      | 0.3      | 0.4      | 0.25     | 0.5      | 0.2      | $E_2$               |
| 13   | 0.35     | 0.3      | 0.2      | 0.25     | 0.5      | 0.25     | $E_2$               |
| 14   | 0.15     | 0.3      | 0.2      | 0.5      | 0.15     | 0.25     | $E_2$               |
| 15   | 0.25     | 0.4      | 0.2      | 0.5      | 0.15     | 0.25     | $E_2$               |
| 16   | 0.2      | 0.45     | 0.2      | 0.5      | 0.15     | 0.25     | $E_2$               |
| 17   | 0.2      | 0.45     | 0.2      | 0.1      | 0.15     | 0.25     | $E_2$               |

Требуется выполнить следующие задания:

- 1) Составить матрицу переходов системы за один шаг.
- 2) Моделировать 24 шага переходов системы с помощью таблицы случайных чисел (табл. 6) по следующему принципу.

Пусть на данном шаге система находится в состоянии М. Обозначим через  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  вероятности переходов из состояния М в состояния  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ . С помощью очередного случайного числа  $x$  определяем следующее состояние системы по правилу:

$E_1$ , если  $x \leq p_1$  ;

$E_2$ , если  $p_1 < x \leq p_1 + p_2$  ;

$E_3$ , если  $p_1 + p_2 < x$  .

3) Вычислить относительные частоты каждого состояния системы за 24 шага перехода плюс исходное состояние.

4) Вычислить вероятности каждого состояния системы за 5 шагов, начиная с заданного.

5) Вычислить предельные вероятности системы.

6. Выполнить сравнения:

а) при правильном расчете распределения вероятностей пункта 5 должны стремиться к предельным;

б) относительные частоты состояний должны не слишком отличаться от предельных (при большом числе шагов – стремятся к предельным).

Таблица случайных чисел

Табл. 6

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.837 | 0.953 | 0.787 | 0.608 | 0.136 | 0.880 | 0.364 | 0.206 |
| 0.665 | 0.188 | 0.118 | 0.440 | 0.086 | 0.305 | 0.454 | 0.386 |
| 0.524 | 0.273 | 0.996 | 0.032 | 0.851 | 0.922 | 0.416 | 0.091 |

*Примечание. Порядок чисел в таблице построчный.*